2020 年重庆市普通高校专升本考试绝密押题试卷

高等数学

题　号	一	二	三	四	总分
题　分	32	16	64	8	
得　分					

总分合计人(签名)____________　总分复核人(签名)____________

复查总分____________　复查人(签名)____________

得分	评卷人

一、单项选择题(本大题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

1. 当 $x \to 0$ 时,$x^3 + x$ 是 $\sin x$ 的__________无穷小.　(　　)

A. 高阶　B. 低阶　C. 同阶非等价　D. 等价

2. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 3e^x, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{\arctan x}{x} + a, & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续,则 $a =$　(　　)

A. $2 - e$　B. $3e$

C. $3 + e$　D. $3 - e$

3. 设 $f'(x)$ 是连续函数,则 $d\int f'(x)dx =$　(　　)

A. $f(x)dx$　B. $f'(x)dx$　C. $f(x)$　D. $f'(x)$

4. 点 $(1, -1, 0)$ 到平面 $2x + y - z + 3 = 0$ 的距离为　(　　)

A. $\dfrac{2}{3}$　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　C. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　D. $\dfrac{1}{3}$

5. 若 C_1 和 C_2 为两个独立的任意常数,则 $y = C_1\cos x + C_2\sin x$ 为下列哪个方程的通解

(　　)

A. $y'' + y = 0$　　B. $y'' + y = x^2$

C. $y'' - 3y' + 2y = 0$　　D. $y'' + y' - 2y = 2x$

6. 下列级数收敛的是　　(　　)

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + 9^n}{n \cdot 7^n}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

7. 设可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1} =$　　(　　)

A. $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　　B. $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

C. $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　　D. $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

8. 设 A,B 是两个随机事件,且 $A \subset B$,则不能推出的结论是　　(　　)

A. $P(A \cap B) = P(A)$　　B. $P(A \cup B) = P(B)$

C. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(B)$　　D. $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A)$

得分	评卷人

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

9. 函数 $f(x) = x\frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ 的图像关于________对称.

10. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = 8$,则 $a =$ __________.

11. 设 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$,若元素 a_{ij} 的代数余子式为 $A_{ij}(i,j = 1,2,3)$,则 $A_{31} + A_{32} + A_{33} =$ ___________.

12. 从编号为 1,2,3,4,5 的 5 张卡片中随机抽出 3 张,最小编号是 2 的概率等于__________.

得分	评卷人

三、计算题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

13. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\arcsin x \cdot \ln y - e^{2x} + y^3 = 0$ 确定,求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

14. 求不定积分 $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

15. 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + x) \sin x dx$.

16. 设 $z = f(2x + 3y, \ln xy)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

17. 已知平面区域 D 由直线 $y=1, y=x, x=2$ 围成,求 $\iint\limits_{D} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

18. 求微分方程 $y'+y\cos x-\mathrm{e}^{-\sin x}\ln x=0$ 的通解.

19. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 3\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,求 $\boldsymbol{X}$.

20. 判断线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3-x_4=1,\\2x_1-x_2-x_3+4x_4=2,\\x_1-4x_3+5x_4=-1\end{cases}$ 是否有解,有解时求出它的解.

得分	评卷人

四、证明题(本大题 8 分)

21. 设 $a > b > 0, n > 1$,证明:$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$.

参考答案及名家精析

一、单项选择题

1.［答案］ D

【精析】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+x}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x^2+1)=1$,故应选 D.

2.［答案］ D

【精析】 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}3e^x=3$,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{\arctan ex}{x}+a)=e+a$,$f(0)=3$,由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可得$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$,因此 $a=3-e$.

3.［答案］ B

【精析】 根据不定积分与导数的关系知 $d\int f'(x)dx=f'(x)dx$,故应选 B.

4.［答案］ C

【精析】 由点到平面的距离公式可知,$d=\frac{|2-1-0+3|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{4}{\sqrt6}=\frac{2\sqrt6}{3}$.

5.［答案］ A

【精析】 由通解 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 可知对应的特征方程的特征根为 $r_{1,2}=\pm i$,特征方程为$r^2+1=0$,则对应的微分方程为 $y''+y=0$,故应选 A.

6.［答案］ D

【精析】 选项 A,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq0$,不满足级数收敛的必要条件,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ 发散.

选项 B,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{n^2+n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+n}=2$,由比较审敛法的极限形式可知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 敛散性相同,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+n}$ 发散.

选项 C,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n+9^n}{n\cdot7^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{9}{7}\right)^n$,因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^n}$ 为等比级数,公比 $q=-\frac{1}{7}$,且 $|q|<1$,可知其收敛;又有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9^{n+1}}{(n+1)7^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot7^n}{9^n}=\frac{9}{7}>1$,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{9}{7}\right)^n$ 发散,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n+9^n}{n\cdot7^n}$ 发散.

选项 D，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{n^2}=\dfrac{1}{2}<1$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$ 收敛，故应选 D.

7. [答案] C

【精析】 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，所以 $|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{A}|$，

因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2$. 故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$

$=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

8. [答案] C

【精析】 如果 $A\subset B$，那么 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$，$\overline{A}\cap B=B-AB$，于是

$P(A\cap B)=P(A)$，$P(A\cup B)=P(B)$，

$P(\overline{A}\cap B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)$，

因此排除选项 A，B，D.

二、填空题

9. [答案] $x=0$（y 轴）

【精析】 函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(-x)=-x\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=-x\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=f(x)$，

则函数 $f(x)$ 为偶函数，故函数关于 $x=0$ 或 y 轴对称.

10. [答案] ln2

【精析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a+3a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{3a}\cdot\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^a$

$=\mathrm{e}^{3a}=8$，

故 $3a=\ln 8$，从而 $a=\ln 2$.

11. [答案] $\dfrac{1}{2}$

【精析】 由题可得 $2A_{31}+2A_{32}+2A_{33}=1$，则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=\dfrac{1}{2}$.

12. [答案] $\dfrac{3}{10}$

【精析】 随机抽出 3 张包含的基本事件总数为 C_5^3，最小编号是 2 包含的基本事件个数为 C_3^2，则有 $P=\dfrac{\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_5^3}=\dfrac{3}{10}$.

三、计算题

13. **【精析】** 将 $x=0$ 代入方程 $\arcsin x\cdot\ln y-\mathrm{e}^{2x}+y^3=0$ 得 $y=1$.

方程 $\arcsin x\cdot\ln y-\mathrm{e}^{2x}+y^3=0$ 两边对 x 求导数得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\ln y+\frac{\arcsin x}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2\mathrm{e}^{2x}+3y^2\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

将 $x=0,y=1$ 代入上式得

$$-2+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}=0,$$

则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}=\frac{2}{3}$.

14.【精析】 $\int\sin^2x\cos^3x\mathrm{d}x=\int\sin^2x\cos^2x\mathrm{d}(\sin x)=\int\sin^2x(1-\sin^2x)\mathrm{d}(\sin x)$

$$=\int(\sin^2x-\sin^4x)\mathrm{d}(\sin x)=\frac{1}{3}\sin^3x-\frac{1}{5}\sin^5x+C.$$

15.【精析】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2+x)\sin x\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot\sin x\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\sin x\mathrm{d}x.$

又 $x^2\cdot\sin x$ 为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的奇函数,则 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot\sin x\mathrm{d}x=0$,

故

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2+x)\sin x\mathrm{d}x&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x\\&=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}(\cos x)\\&=-2\left(x\cos x\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x\right)=2.\end{aligned}$$

16.【精析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=2f'_1+\frac{1}{x}f'_2$,

$$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=2(f''_{11}\cdot3+f''_{12}\cdot\frac{1}{y})+\frac{1}{x}(f''_{21}\cdot3+f''_{22}\cdot\frac{1}{y})=6f''_{11}+(\frac{3}{x}+\frac{2}{y})f''_{12}+\frac{1}{xy}f''_{22}.$$

17.【精析】 由题意可知积分区域 D 可表示为 $1\leqslant x\leqslant2,1\leqslant y\leqslant x$,故

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^x x\mathrm{d}y=\int_1^2(xy)\bigg|_1^x\mathrm{d}x=\int_1^2(x^2-x)\mathrm{d}x=\frac{5}{6}.$$

18.【精析】 $P(x)=\cos x,Q(x)=\mathrm{e}^{-\sin x}\ln x$,由一阶微分方程通解公式可得

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int\cos x\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{-\sin x}\ln x\cdot\mathrm{e}^{\int\cos x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\mathrm{e}^{-\sin x}\left(\int\ln x\mathrm{d}x+C\right)\\&=\mathrm{e}^{-\sin x}(x\ln x-\int\mathrm{d}x+C)\\&=x(\ln x-1)\mathrm{e}^{-\sin x}+C\mathrm{e}^{-\sin x}.\end{aligned}$$

19.【精析】由等式 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$ 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$,而 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=-3\neq0$,即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆,从而

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

20.【精析】增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right),$$

由此得 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = 2 \neq \boldsymbol{r}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$. 所以方程组无解.

四、证明题

21.【证明】 设 $f(x) = x^n$,

显然 $f(x)$ 在闭区间 $[b,a]$ 上连续,在开区间 (b,a) 内可导.

由拉格朗日中值定理得,在 (b,a) 内至少存在一点 ξ,使得 $f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b)$,即 $a^n - b^n = n\xi^{n-1}(a-b)$.

又因为 $b^{n-1} < \xi^{n-1} < a^{n-1}$,所以 $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$.